

モジュラーテンソル圏の構造と内積関手、非退化性に関する完全な数学的基礎

本稿では、共形場理論（CFT）や位相的量子場理論（TQFT）において現れる「モジュラーテンソル圏（Modular Tensor Category; MTC）」について、単純対象が1つだけの場合の構造から出発し、複数の圏の間の「内積関手」、Deligneテンソル積、そして非退化性に関する数学的条件を厳密に解説する。

1. 単純対象が1つだけのモジュラーテンソル圏の構造

共形場理論におけるコセット構成などで、「ある種のフェルミオン」に関連する構成から得られる単純対象が1つだけのモジュラーテンソル圏について考える。

定理 1.1

単純対象が同型を除いて1つしか存在しないモジュラーテンソル圏 $\mathcal{C}$ は、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間の圏 Vec と圏同値（ブレイドテンソル圏として同値）である。

この事実は以下のような構造を持つことを意味する。

- 単純対象と融合則 (Fusion Rules):** 単純対象が1つのみであるため、その対象は必然的にテンソル積の単位対象（真空） 1 となる。フュージョンルールは極めて単純であり、

$$1 \otimes 1 \cong 1$$

となる。新たなエニオン（粒子）が生成されることはない。

- アソシエーターとブレディング (F-symbols & R-symbols):** 対象が 1 のみであるため、結合法則の組み換え（ペンタゴン方程式）に関する係数 F および、粒子の交換（ヘキサゴン方程式）に関する係数 R はすべて自明なスカラー 1 になる。
- モジュラーデータ (S 行列と T 行列):** モジュラーデータは単純対象の同型類を基底とする行列である。単純対象が1つなので、これらは 1×1 の行列となる。
 - S 行列: 単位対象の量子次元（Frobenius-Perron次元）は 1 であるため、 $S = (1)$ となる。
 - T 行列: 単位対象の位相的スピン（Topological Spin / ツイスト）は 0 （位相因子としては $e^{2\pi i \cdot 0} = 1$ ）であるため、 $T = (1)$ となる。

物理的解釈：ホロモルフィック共形場理論

物理的には、これは非自明なエニオン励起が一切存在しない状態、すなわち **ホロモルフィック共形場理論（Holomorphic CFT）** を意味する。このとき、中心電荷 c は $c \equiv 0 \pmod{8}$ でなければならない。例えば、 E_8 レベル1 WZWモデル（ $c = 8$ ）やモンスター群を対称性に持つ FLM ムーンシャイン CFT（ $c = 24$ ）がこれに該当する。フェルミオン系からこの状態が得られたとすれば、非自明な励起が完全に凝縮したか、可逆なトポロジカル相（Invertible Topological Phase）の自明クラスに属していることを示唆する。

2. モジュラーテンソル圏の内積関手

$\mathbb{C}$ 上の2つのモジュラーテンソル圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ と、自明なMTCである Vect について考える。 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の「内積」として振る舞う関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Vect}$ を定義する。これは線形代数における双線形形式（内積）の **Categorification（圏化）** である。

定義 2.1 (内積としての関手)

関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Vect}$ が以下の3条件を満たすとき、これを「内積関手」と呼ぶ。

- 双加法性および $\mathbb{C}$ -双線形性:** 各変数に関して直和を保存する。すなわち、任意の $c_1, c_2 \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ に対して $F(c_1 \oplus c_2, d) \cong F(c_1, d) \oplus F(c_2, d)$ であり、Hom空間のレベルでも $\mathbb{C}$ 上の双線形写像を与える。
- 双モノイダル構造:** 対象 $c, c' \in \mathcal{C}$ と $d, d' \in \mathcal{D}$ に対して、自然な同型

$$\Phi : F(c \otimes_{\mathcal{C}} c', d \otimes_{\mathcal{D}} d') \xrightarrow{\sim} F(c, d) \otimes_{\text{Vect}} F(c', d')$$

が存在し、これが各圏の結合律（アソシエーター）および単位律と整合する（ペンタゴン公理を満たす）。

- ブレイディングとの整合性:** $\mathcal{C}$ のブレイディング $c_{x,y}$ と $\mathcal{D}$ のブレイディング $d_{u,v}$ の引き戻しが、 Vect における対称なテンソル積の入れ替えと同値となる。物理的な整合性を満たすためには、片方の圏を反転圏（後述）としてペアリングを構成することが一般的である。

定義 2.2 (非退化性)

線形代数における内積の非退化性と同様に、関手 F の非退化性を次のように定義する。

(表現関手による定義): 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して関手 $F(c, -) : \mathcal{D} \rightarrow \text{Vect}$ を考えると、 $\mathcal{D}$ の自己双対性より、ある対象 $d_c \in \mathcal{D}$ が存在して $F(c, x) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x, d_c)$ となる（表現可能）。この対応 $c \mapsto d_c$ が圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の（反変または双対を含む）**圏同値 (Equivalence of Categories)** を与えるとき、 F は非退化であるという。

(単純対象による具体的な定義): $\mathcal{C}$ の単純対象の集合 $\text{Irr}(\mathcal{C})$ と $\mathcal{D}$ の単純対象の集合 $\text{Irr}(\mathcal{D})$ の間に全単射 $i \mapsto j(i)$ が存在し、 $c_i \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ と $d_k \in \text{Irr}(\mathcal{D})$ に対して

$$F(c_i, d_k) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & (k = j(i)) \\ 0 & (k \neq j(i)) \end{cases}$$

が成り立つこと。これは $\langle e_i, f_k \rangle = \delta_{i,k}$ の圏論版である。

3. 内積関手が非退化になる条件と反転圏

このような関手 F が非退化になるための必要十分条件は、圏 $\mathcal{D}$ が圏 $\mathcal{C}$ の反転圏 $\bar{\mathcal{C}}$ （あるいは鏡像・双対圏）と同値であることである。

定義 3.1 (反転圏 $\bar{\mathcal{C}}$)

モジュラーテンソル圏 $\mathcal{C}$ に対して、その反転圏 $\bar{\mathcal{C}}$ （または $\mathcal{C}^{\text{rev}}$ ）とは、対象の集合、射の集合、テンソル積 $\otimes$ は $\mathcal{C}$ と完全に同一であるが、ブレイディング $c_{X,Y}^{\text{rev}}$ が逆向きになる圏のことである。

$$c_{X,Y}^{\text{rev}} := (c_{Y,X})^{-1}$$

これにより、トポロジカル・ツイスト（位相的スピン）は元の圏の複素共役となり、物理的には**空間反転（パリティ）あるいは時間反転した理論**に対応する。

非退化な F が存在するとき、 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ のマクロなトポロジカル不変量（モジュラーデータ）は以下のように完全に結びつく。

- ランクの一致:** 単純対象の個数が等しい： $|\text{Irr}(\mathcal{C})| = |\text{Irr}(\mathcal{D})|$ 。
- モジュラーデータの複素共役:** 全単射 $i \leftrightarrow j$ のもとで、 $S_{j,k}^{(D)} = \overline{S_{i,l}^{(C)}}$ および $T_j^{(D)} = \overline{T_i^{(C)}}$ が成り立つ。

標準的な非退化関手の構成

$\mathcal{D} = \bar{\mathcal{C}}$ としたとき、任意の $c \in \mathcal{C}$ と $d \in \bar{\mathcal{C}}$ に対して、

$$F(c, d) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, c \otimes d) \quad (\text{または } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c^*, d))$$

と定義すれば、これは非退化な関手となる。物理的には、粒子 c と粒子 d が融合して真空 $\mathbf{1}$ に戻るチャンネル（状態空間）の次元を測るものであり、反粒子同士のときのみ次元が1（ $\mathbb{C}$ ）となる。

4. Deligneテンソル積 $\boxtimes$

関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Vect}$ の構造は、ベクトル空間のテンソル積の圏論的アナロジーである **Deligneテンソル積** を用いるとより本質的に理解できる。

定義 4.1 (Deligneテンソル積)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限アーベル圏とする。Deligneテンソル積 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ とは、次の普遍性を満たす $\mathbb{C}$ 上の有限アーベル圏のことである。

任意の $\mathbb{C}$ 上の有限アーベル圏 $\mathcal{E}$ に対して、関手圏の間の同値

$$\mathbf{Fun}^{\mathrm{rex}}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fun}^{\mathrm{bi-rex}}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E})$$

が存在する。ここで、 $\mathbf{Fun}^{\mathrm{rex}}$ は右完全関手の圏、 $\mathbf{Fun}^{\mathrm{bi-rex}}$ は各変数に関して右完全な双関手の圏を表す。

有限半単純圏においては、Deligneテンソル積の構造は非常に明快である：

- 単純対象:** $\mathcal{C}$ の単純対象を X_i 、 $\mathcal{D}$ の単純対象を Y_j とすると、 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の単純対象はすべて $X_i \boxtimes Y_j$ の形で表される。したがって、ランクは $\mathrm{Rank}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) = \mathrm{Rank}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Rank}(\mathcal{D})$ となる。
- Hom空間:**

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}}(X_1 \boxtimes Y_1, X_2 \boxtimes Y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_1, Y_2)$$

- 構造の継承:** テンソル積や単位対象、ブレイディング $c_{X_1 \boxtimes Y_1, X_2 \boxtimes Y_2} = c_{X_1, X_2} \boxtimes c_{Y_1, Y_2}$ は自然に定義され、モジュラータもクロネッカー積 $S_{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}} = S_{\mathcal{C}} \otimes S_{\mathcal{D}}$ となる。

Deligneテンソル積の普遍性により、双線形な内積関手 $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Vect}$ を考えることは、**単一の線形関手** $\tilde{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Vect}$ を考えることと完全に等価となる。

5. テンソル関手の忠実性と、非退化性の厳密な数学的条件

ここから、物理的直観を排し、純粋に代数・圏論の立場から $\tilde{F}$ の非退化性について厳密に証明する。その鍵となるのは「剛性を持つ圏の間の関手は常に忠実になる」という事実である。

定義 5.1 (非退化性の数学的再定義)

線形関手 $\tilde{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Vect}$ が与えられたとき、表現可能定理により、線形関手 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ が一意に存在して、自然同型

$$\tilde{F}(X \boxtimes Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, G(X))$$

が成り立つ。この G が**圏同値 (equivalence of categories)** を与えるとき、 $\tilde{F}$ は非退化であると定義する。

関手 $\tilde{F}$ がテンソル構造と整合的であれば、誘導された $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ はテンソル関手（モノイダル関手）となる。

定理 5.2 (剛性と忠実性)

剛性 (Rigidity: 左右の双対対象の存在) を持ち、単位対象の自己準同型環が自明 ($\mathrm{End}(\mathbf{1}) \cong \mathbb{C}$) なテンソル圏（モジュラ性や半単純性を仮定しない）において、非自明なテンソル関手 $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ は**自動的に忠実 (faithful)** になる。

証明:

任意の射 $f: X \rightarrow Y$ をとる。 $G(f) = 0$ と仮定して $f = 0$ を導けばよい。

圏 $\mathcal{C}$ は剛性を持つため、対象 X には双対対象 X^* と評価射 $\mathrm{ev}_X: X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ 、余評価射 $\mathrm{coev}_X: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$ が存在する。これにより、Hom空間の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}, X^* \otimes Y)$$

が得られる。この同型で f に対応する射を $\hat{f}: \mathbf{1} \rightarrow X^* \otimes Y$ と書く。 ($f = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{ev}_X) \circ (\hat{f} \otimes \mathrm{id}_X)$ という関係がある。)

$f \neq 0$ であると仮定すると、同型写像であるため $\hat{f} \neq 0$ である。ここで $\mathrm{End}(\mathbf{1}) \cong \mathbb{C}$ を用いると、ある射 $g: X^* \otimes Y \rightarrow \mathbf{1}$ を適切に選ぶことで、合成射 $g \circ \hat{f} = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}$ とすることができる。

これに関手 G を作用させると、テンソル関手は単位対象を保つ ($G(\mathbf{1}) \cong \mathbf{1}$) ため、

$$G(g) \circ G(\hat{f}) = G(\mathrm{id}_{\mathbf{1}}) = \mathrm{id}_{G(\mathbf{1})} \neq 0$$

となる。したがって $G(\hat{f}) \neq 0$ である。 f を $f = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{ev}_X) \circ (\hat{f} \otimes \mathrm{id}_X)$ と展開して G を作用させたものについて考えれば、 $G(f) = 0$ は $G(\hat{f}) = 0$ を導くため、矛盾する。ゆえに $f = 0$ である。証明終。

この強力な定理により、「単射性 (忠実性)」はテンソル関手であるだけで保証される。したがって、 $\tilde{F}$ が非退化 (G が圏同値) になるための条件は、「全射性」に帰着される。

定理 5.3 (非退化性の必要十分条件)

誘導された関手 G がテンソル関手であるとき、 $\tilde{F}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{Vect}$ が非退化になるための必要十分条件は、以下の2つを同時に満たすことである。

- 充満性 (Fullness):** 任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(G(X), G(Y))$ が全射 (忠実性と合わせて全単射) であること。これにより単純対象が単純対象に写される。
- 圏のサイズの一致:** 単純対象の個数 (ランク) が等しいこと。あるいは、Frobenius-Perron 次元について $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{D})$ が成り立つこと。

MTCよりも緩い条件

上記の定理の証明には、「モジュラー性 (S行列の非退化性)」「リボン構造」「ブレイディング」「半単純性」は一切使用されていない。したがって、この非退化性の論理は、半単純性を仮定しない**有限テンソル圏 (Finite Tensor Category)** や、ブレイディングを持たない**融合圏 (Fusion Category)** においても完全に成立する (Etingof-Gelaki-Nikshych-Ostrik らの結果)。

6. 本来モジュラー性 (MTC) が必要となる局面

では、単なるテンソル圏ではなく、真に「モジュラーテンソル圏 (非退化なS行列)」を要求するのはどのような局面であろうか。それは、代数的な構造から離れ、大域的なトポロジーや空間の切り貼りを記述するときである。

- Verlinde公式の成立:** フュージョン係数 N_{ij}^k (代数的な積) を、位相的な絡み合いを表す S 行列で同時対角化する公式。

$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{il} S_{jl} (S^{-1})_{lk}}{S_{0l}}$$

この美しい関係式が成立するためには、 S 行列が逆行列 S^{-1} を持つこと (非退化であること) が絶対条件となる。

- 3次元位相的量子場理論 (3D TQFT) の構築:** Reshetikhin-Turaev は、MTCから3次元多様体の不変量を構成した。3次元多様体は結び目に沿った「デーン手術 (Dehn surgery)」で得られるが、どの結び目を選んでも結果が同じ多様体なら同じ不変量を与える (Kirby計算の不変性) ことを保証するためには、特定の規格化と S 行列の逆行列が不可欠である。
- モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の表現:** トーラス上の CFT において、座標の大域的変換 (縦の輪と横の輪の入れ替え $\tau \rightarrow -1/\tau$ など) に対するモジュラー不変性を記述するため、 S 行列と T 行列が $(ST)^3 = S^2 = C$ という関係を満たす射影表現を与えなければならない。

7. Müger中心と透明なエニオンの排除

モジュラー性の代数的な定式化は、Müger中心という概念を用いてエレガントに記述される。

定義 7.1 (モノドロミー / 二重ブレイディング)

ブレイドテンソル圏 $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対し、モノドロミー（二重ブレイディング）を

$$M_{X,Y} := c_{Y,X} \circ c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} X \otimes Y$$

と定義する。これは粒子 Y が粒子 X の周りを1周回ったときの位相のズレを測る作用素である。

定義 7.2 (Müger中心)

圏 $\mathcal{C}$ の Müger中心 $\mathcal{Z}_{\text{Müger}}(\mathcal{C})$ とは、任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $M_{Z,X} = \text{id}_{Z \otimes X}$ が成り立つような対象 Z 全体からなる部分圏である。

Müger中心は「他のすべての対象とブレイディングさせても位相的なもつれが全く生じない（対称な）対象」の集まりである。

定理 7.3 (MTCとMüger中心)

有限半単純なリボン圏において、以下の3条件はすべて同値である。

- S 行列が非退化（可逆）である。
- 圏がモジュラーテンソル圏 (MTC) である。
- Müger中心が自明である** ($\mathcal{Z}_{\text{Müger}}(\mathcal{C}) \simeq \text{Vec}$) 。

物理的意味： Müger中心が自明でないということは、「他のどの粒子と干渉実験（アハラノフ・ボーム効果）を行っても絶対に位相変化を及ぼさない、検知不能な透明なエニオン」が存在することを意味する。モジュラー性（非退化性）は、そのような幽霊粒子が存在せず、すべての粒子が完全な観測可能性を持つ健全なトポロジカル相であることを保証している。

※注意: これは Drinfeld中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ とは異なる。Drinfeld中心は任意のモノイダル圏からブレイドテンソル圏を新たに構築する手法であるが、Müger中心はすでにブレイディングを持つ圏の部分圏として定義される。

参考文献

- Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., & Ostrik, V. (2015). *Tensor Categories* (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 205). American Mathematical Society.
<https://bookstore.ams.org/surv-205/>
- Bakalov, B., & Kirillov, A. Jr. (2001). *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors* (University Lecture Series, Vol. 21). American Mathematical Society.
<https://bookstore.ams.org/ulect-21>
- Müger, M. (2000). Galois theory for braided tensor categories and the modular closure. *Advances in Mathematics*, 150(2), 151-201.
[arXiv:math/9812040](https://arxiv.org/abs/math/9812040)
- Turaev, V. G. (2010). *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds* (De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 18). Walter de Gruyter.
[De Gruyter Link](#)
- Huang, Y.-Z. (2008). Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture. *Communications in Contemporary Mathematics*, 10(01), 103-154.
[arXiv:math/0406291](https://arxiv.org/abs/math/0406291)